

活齿传动的拟动力学研究

南京航空学院

左洪福**

中国矿业大学

周有强

【摘要】 本文针对活齿传动的基型结构, 综合考虑弹性变形、几何误差、摩擦学行为及润滑等问题的交叉影响, 全面地研究了活齿传动的载荷特性和运动学问题。在受力分析方面, 针对该传动多齿同时承载的特点, 系统地研究了轮齿载荷分配规律, 并提出了一个统一的载荷计算公式。在运动学研究方面, 鉴于该传动的活齿及转臂轴承外圈均具有局部自由度的特点, 提出了滑动系数的概念, 研究了活齿及轴承外圈的打滑规律。在实验方面, 采用光弹性实验方法验证了轮齿的受载情况; 同时采用高速摄影技术观测了活齿的实际打滑状况。从而证实了本文的研究结论。

一、力学模型

1. 活齿力平衡方程 活齿在某一位置时的受力情况如图 1 所示。设活齿齿数为 Z_R , 根据力平衡关系, 并考虑这是第 i 个齿, 则可得

$$P_{li} = \zeta_i P_{wi} \quad (l = a, b; \quad i = 1, 2, \dots, Z_R) \quad (1)$$

其中 $\zeta_i = \sin \alpha'_i \cos \psi_{ai} / (\sin \gamma'_i \cos \psi_{wi})$

$$\zeta_i = \sin \beta'_i \cos \psi_{bi} / (\sin \gamma'_i \cos \psi_{wi})$$

$$(i = 1, 2, \dots, Z_R)$$

而

$$\begin{cases} \alpha'_i = \alpha - \psi_{bi} + \psi_{wi} \\ \beta'_i = \beta - \psi_{wi} + \psi_{ai} \\ \gamma'_i = \gamma - \psi_{ai} + \psi_{bi} \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, Z_R)$$

式中下标 a, b, w 分别代表偏心轮、内齿、保持架; α, β, γ 分别代表力 $\vec{P}_b$ 与 $\vec{P}_w$ 、 $\vec{P}_w$ 与 $\vec{P}_a$ 、 $\vec{P}_a$ 与 $\vec{P}_b$ 的夹角; ψ 为摩擦角。

2. 活齿力矩平衡方程 对活齿质心 O_R 取矩, 有

$$r_R \sum_{l=a}^{b,w} F_{li} - \left\{ I_R \frac{d\omega_R}{dt} \right\}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, Z_R) \quad (2)$$

式中 F 为摩擦力; r_R 为活齿半径, I_R 为活齿转动惯量, ω_R 为活齿转速。

3. 保持架负载平衡方程 各活齿对保持架的反作用力还必须与保持架的负载力矩 M_{wo} 相平衡, 即

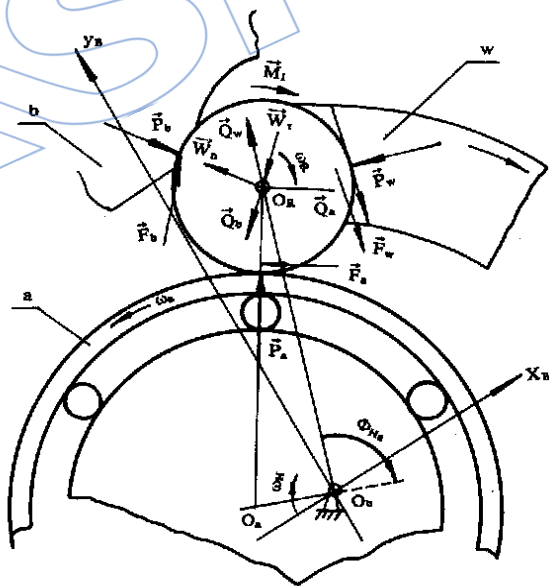


图 1 力学模型

$$\sum_{i=1}^{Z_R} P_{wi}(r_{wi} - f r_R) = M_{wo} \quad (3)$$

式中 r_{wi} 是反力 P_{wi} 对保持架转动中心的力臂; f 是摩擦系数。

4. 转臂轴承外圈力矩平衡方程 转臂轴承外圈除受活齿的摩擦力作用之外, 还受轴承滚动体的摩擦力 F_B 的作用。故有质心动量矩方程

$$r_{BO} \sum_{i=1}^{Z_R} F_{ai} + r_{BI} \sum_{j=1}^{N_B} F_{Bj} - I_a \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (4)$$

式中 r_{BO} , r_{BI} 为轴承外圈外、内半径; N_B 为轴承滚子数目。 ω 为外圈转速; I_a 为外圈转动惯量。

二、相关问题

1. 变形协调条件 由于我们考虑的是一个弹性系统, 受力后系统要产生变形, 导致活齿发生位移。如果位移后该齿仍然受载, 则必须满足如下的变形协调条件^[1]:

$$\sum_{l=a}^{b,w} (\delta_l + h_g - h_o)_{li} = e \cos \Phi \quad (i = 1, 2, \dots, Z_R) \quad (5)$$

式中 Φ 为该齿的位置角; e 是偏心轮几何中心 O_a 点受力后的位移; δ_i , h_{gli} 及 h_{oli} 则分别为该齿第 l ($l = a, b, w$) 个啮合副处的弹性变形, 几何误差及油膜厚度等所引起的该活齿相对偏心轮几何位置的位移^[1]。

受力的各啮合副将产生接触变形, 另外内齿齿廓还将产生弯曲变形和压缩、剪切等变形。这些变形中接触变形为主要变形。

2. 润滑模型 活齿传动各啮合部位按线接触润滑考虑, 本文用张鹏顺^[2]统一膜厚公式

$$\bar{h} = A h_g^n C_T \quad (6)$$

计算膜厚。各参数的数学定义见文献 [2]。

3. 摩擦力 本文在重载区采用 Crook 摩擦力公式^[6]:

$$F = 2ahz \eta_h(u_2 - u_1)/h \quad (7a)$$

在轻载区则采用 Camer on^[4]摩擦系数公式:

$$f = 1.5 \{ (S + 22)/35 \} 0.6 / (\eta_b^{1/8} |u_2 - u_1|^{1/3} |u_2 + u_1|^{1/6} R_L^{1/2}) \} \quad (7b)$$

式 (7) 中各参数意义可参见原文。

三、求解方法简介

方程 (1) ~ (7) 构成一个复杂的大型非线性方程组, 直接求解几乎不可能。本文采用分块迭代、逐步逼近的办法求解。

载荷迭代程序如下^[1]:

$$\begin{cases} P_{wp}^{(n_p+1)} = \left[e \cos \Phi - \sum_{l=a}^{b,w} (h_g - h_o)_{li} \right]^{(n_p)} \setminus \{ F_i + G_i P_{wi} \}^{(n_p)} \\ \sum_{i=1}^{Z_R} (r_{wi} - f r_R) P_{wi}^{(n_p+1)} - M_{wo} = \delta_{LD} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中 F_i , G_i 是与载荷及几何参数均有关的量。

运动学问题实际上就是活齿及转臂轴承外圈的打滑问题, 可将有关方程整理成如下特殊形式来解:

$$\begin{cases} f_1(\omega_{RZ_R}, \omega_{R1}, \omega_{R2}, \omega) = 0 \\ f_2(\omega_{R1}, \omega_{R2}, \omega_{R3}, \omega) = 0 \\ \vdots \\ f_{Z_R}(\omega_{RZ_R-1}, \omega_{RZ_R}, \omega_{R1}, \omega) = 0 \\ f_{Z_R+1}(\omega_{R1}, \omega_{R2}, \dots, \omega_{RZ_R}, \omega) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

这是一个非线性方程组的求根问题^[2]。

四、轮齿载荷特征

图 2 是轮齿典型的载荷特性情况。不考虑油膜厚度及几何误差的影响时, 通过对 200 多道算例的多元非线性回归与优化分析, 总结了一个适用范围很广的一般公式:

$$P_w = C_z (M_{H1}/R_A) \sin^E \varphi_a \quad (10)$$

式中 M_{H1} 为输入轴扭矩; C_z 为载荷幅值系数; E 为指数, R_A 为活齿分布圆半径; φ_a 为参数角。

大量的统计分析表明载荷幅值系数 C_z 与指数 E 存在确定的关系。二者的回归关系如下:

$$E = -2.963 + 1.241C_z$$

而幅值系数与各几何参数又满足如下回归关系:

$$C_z = 4.148 \cdot F_1(K, Z_R/Z_b) \cdot F_2(Z_R/Z_b) \cdot F_3(r_R/A) \quad (11)$$

其中

$$F_1(K, Z_R/Z_b) = 1 - a(Z_R/Z_b)K - b[(Z_R/Z_b)K]^2$$

$$\begin{cases} a = -2.906 + 6.177(Z_R/Z_b) - 3.14(Z_R/Z_b)^2 \\ b = -1.434 + 2.985(Z_R/Z_b) - 1.502(Z_R/Z_b)^2 \end{cases}$$

$$F_2(Z_R/Z_b) = (Z_R/Z_b)^{0.046}$$

$$F_3(r_R/A) = 1 + 0.29 \times 10^{-3}(r_R/A)$$

式中 A 为中心距; Z_b 为内齿齿数; $K = Z_b A / R_A$ 。

上述数值公式与精确的数值解之间的误差 $< 5\%$, 在最大载荷位置, 误差 $< 0.5\%$ 。

考虑几何误差时, 作者在文献 [1] 中进行了详细的讨论, 本文仅给出一个例子, 即滚子半径减少 (负偏差) 时的载荷变化情况 (图 2)。

五、打滑分析

为了便于分析, 本文定义 $\lambda = (\omega_R - \omega_R^w) / (\omega_R^b - \omega_R^w)$ 为活齿 (滚子) 的滑动系数, 定义 $\lambda_c = (\omega_c - \omega_c) / \omega_c^b$ 为转臂轴承外圈的滑动系数。其中 ω_R^b 、 ω_R^w 为活齿分别沿内齿或导槽纯滚时的转速。内齿固定时 $\omega_c = \omega_H / i_{HW} = [(Z_R - Z_b) / Z_R] \omega_H$ 。而无论内齿固定还是保持架固定, 均设定 $\omega_c^b = [(Z_R - Z_b) / Z_R] \omega_H$ 。 ω_H 为输入轴转速, ω_c 为输出轴 (保持架) 转速。

1. 活齿打滑情况 图 3 给出了三组计算结果, 传动参数同图 2。图 4 是对应图 3 之曲线 (2) 的三个啮合副的相对滑动速度情况。活齿的滑动系数一般在 $0 < \lambda \leq 1$ 范围内变化。当 $\lambda = 1$ 时, $\omega_R = \omega_R^b$, 表明活齿沿内齿纯滚动; 当 $\lambda \rightarrow 0$, $\omega_R \rightarrow \omega_R^w$, 表明活齿沿导槽纯滚动。图 3 和

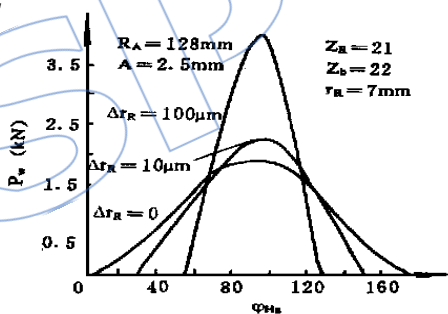


图 2 轮齿载荷特性

(功率 10 kW; 转速 $n_H = 1450 \text{ r/min}$)

图 4 表明：在齿顶和齿根部分，活齿与内齿的相对滑动较小。而在齿中部，活齿与内齿的相对滑动较大；活齿与导槽之间的相对滑动速度始终比较严重；活齿与轴承外圈之间的相对滑动则比较小。大量研究结果表明：活齿一般不存在纯滚的运动状态。

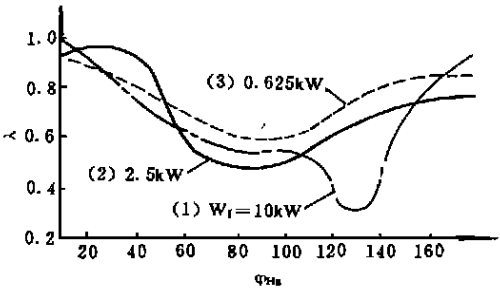


图 3 活齿的滑动系数

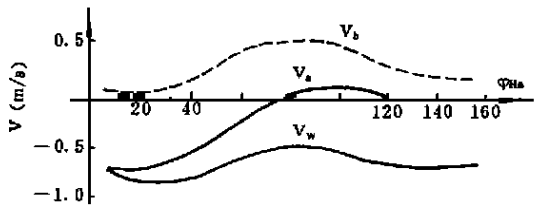


图 4 滑动速度

进一步的分析还表明^[4]：导槽处的卷吸速度较低，不利于油膜的形成，计算的动压油膜厚度不足 $0.1\mu\text{m}$ 。这就是该部位容易磨损的原因。

各种因素对活齿打滑情况有不同的影响，作者在文献 [4] 中进行了详细的讨论。

2. 转臂轴承外圈的打滑问题 对于转臂轴承外圈，通过对大量计算结果的分析总结，其滑动系数 λ_a 一般为 $0.5 \sim 0.8$ ，即

$$\omega_h = \begin{cases} (1.5 \sim 1.8) [(Z_R - Z_b) / Z_R] \omega_H & (\text{内齿固定}) \\ (0.5 \sim 0.8) [(Z_R - Z_b) / Z_R] \omega_H & (\text{保持架固定}) \end{cases} \quad (12)$$

即无论在何种情况下轴承圈始终与保持架同向转动，但转速超前 $0.5 \sim 0.8$ 倍。一般高速轻载时 λ_a 值较小，低速重载时， λ_a 值较大。

六、实验研究

1. 与光弹性实验对比* 本文的数值解及数值公式与文献 [5] 的光弹性实验对比是比较一致的，图 5 是三种负载 (工况：32Nmm；工况：82Nmm；工况：135Nmm) 下的计

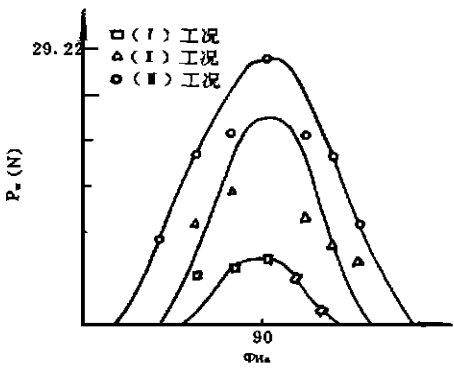


图 5 与光弹性实验对比

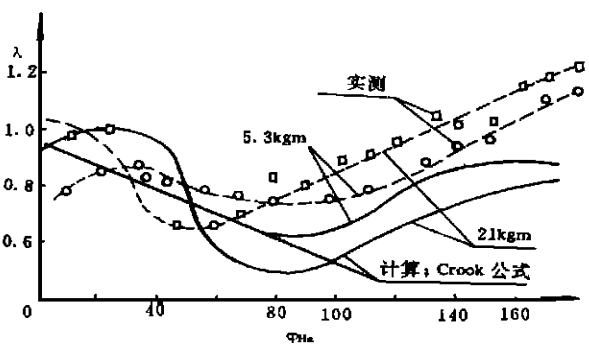


图 6 改变输入扭矩

* 光弹性实验为王宏猷同志所做。

算结果 (实线) 与实测值的对比。载荷幅值系数 C_z 与实测值的最大相对误差为 10% (实测值分别为 1.62, 1.57, 1.49; 计算值为 1.82, 1.48, 1.40)。这是因为数值公式而没有计及几何误差的影响, 而光弹模型难免不存在加工误差的原因。

2. 高速摄影观测实验 本文系用高速摄影技术对活齿的打滑情况进行了观测, 图 6 和图 7 是两组实验对比。图中实线为计算值, 虚线为实验拟合值。

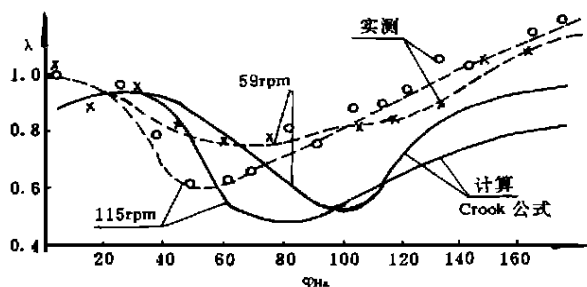


图 7 改变输入转速

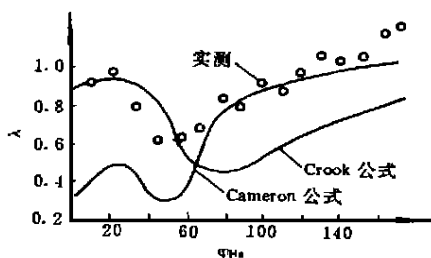


图 8 不同摩擦力计算方法

实验观测证实了本文的研究结论。理论计算的误差主要是因为摩擦力计算公式还不能完全描述复杂的实际情况。图 8 是分别采用 Crook 公式^[3]和 Cameran 公式^[6]得到的计算结果与实测值的对比。显然齿顶部分前者吻合较好, 而齿根部分后者则吻合较好。这是因为齿顶区为“凸—凸”接触, 应力较高, Crook 公式比较适用于重载接触问题; 齿根区为“凹—凸”接触应力较小, Cameron 公式则比较适合于轻载接触问题。这就是本文在重载区采用 Crook 公式, 而在轻载区要采用 Cameron 公式的原因。

结论 (1) 本文综合各种因素的影响, 研究了活齿传动的载荷特性, 并总结了一个精度较高的通用公式。(2) 本文提出了滑动系数的概念, 研究了活齿及转臂轴承外圈的打滑情况。(3) 通过光弹性实验和高速摄影观测, 证实了本文的研究结论。

参 考 文 献

- [1] 左洪福、李保成、周有强, “活齿传动的齿间载荷数值分析”, 中国航空学会第六届机械动力传输专业学术会议论文集, 1990. 11, pp86~93。
- [2] 张鹏顺, “线接触弹流油膜厚度的一个统一公式和修正的润滑状态图”, 润滑与密封, No. 5, 1983, pp1~11。
- [3] Crook, A. W., “The Lubrication of Rollers”, (~), Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A, Vol. 254 (1961b); Vol. 255 (1963)。
- [4] 左洪福、潘升材、周有强、魏任之, “活齿传动的打滑与润滑分析”, 同上, pp35~43。
- [5] 周有强、沈慧芬、王宏猷、左洪福、刘荣华, “活齿少齿差传动的性能分析”, 第二届全国行星传动学术会议, 1985. 12, 广州, pp. 23。
- [6] Cameron A., “Friction and Temperature in Rolling-Sliding Contacts”, ASLE Trans., Vol. 9 (1966)。

QUASI-STATIC ANALYSIS OF ROLLER BEARING

Lin Guochang, Xu Congru, Lin Jishu

(*Shenyang Aeroengine Research Institute*)

ABSTRACT

The quasi-static analysis of radial cylindrical roller bearing is introduced. The influences of the out-of-round raceway, the relative inclination of the roller and race, and flexible deformation of the bearing housing on bearing performance are taken into consideration. The calculation of out-of-round raceway and the counter-rotating intershaft support bearing characteristics are studied. The precise determination of roller loading in an inclined inner race is presented, and the calculation of contact force on the inclined roller is carried out by means of the transverse "slicing" technique. The maximum stress of roller are calculated with the flexible two-dimensional contact variational method. The thermal effects of oil in Hertzian zone and the entry region and the oil starvation influence are also taken into account in the lubrication model. The main bearing in an aeroengine was calculated with the quasi-static analysis program on the M-150H computer. The agreement of calculated and experimental results is quite good.

QUASI-KINETICS OF FOLLOWING TEETH TRANSMISSION

Zuo Hongfu (*Nanjing Aeronautical Institute*)

Zhou Youqing (*China University of Mining & Technology*)

ABSTRACT

The quasi-kinetics and load characteristics of Following Teeth Transmission (FTT) are researched all-sidedly in accordance with its fundamental structure models. In the meantime the interactions of elastic deformations, manufacture errors, lubricating film and so on, are taken into consideration simultaneous of a number of teeth. According to the loading a centralized regressive loading formula is proposed. The concept about skidding coefficient of FTT is firstly introduced. Since there are local freedoms at the following rollers and the outer ring of eccentric bearing, the skidding states of FTT are brought to light. The conclusions were verified by the methods of photo-elastic analysis and high-speed photography was taken during authors' experiments and the test results support the conclusions of the paper satisfactorily.

AN OPTIMAL DESIGN TECHNIQUE FOR CROWNED TEETH OF HELICAL GEAR

Fang Zongde and Shen Yunwen

(*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

An optimal design technique for crowned teeth of helical gear is presented, which includes 3-D finite element method, flexibility matrix and mathematical programming. In the calculation the manufacturing and assembling errors, the deformations of gears and supporting structure are taken into account. For the objective function to uniform the load distribution under the two limited error conditions, a quadratic program is automatically formed and solved by computer. Thus an optimal longitudinal modification with crowning is obtained, which has a comprehensive effect on decreasing the sensitivity to the errors and uniforming the load distribution. Comparison of this modification with the traditional ones demonstrates the advantages of this method in accuracy and effectiveness.